УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С ЧЕТЫРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л.А.Ж а р и к о в а
(Калининградский технический институт)

В трехмерном эквиаффинном пространстве изучаются свойства невырожденной конгруэнции π парабол [1] с четырехкратной фокальной поверхностью.

Исследование проводится в каноническом репере $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ [1]. Вершина репера – точка A помещается в фокальную точку, описывающую поверхность с неасимптотическими фокальными линиями. Вектор $\vec{e}_1$ направлен по касательной к параболе в точке A, $\vec{e}_2$ –по касательной к линии, сопряженной фокальной линии $\omega^2=0$ на поверхности (A), $\vec{e}_3$ – по диаметру параболы, проходящему через точку A.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией π_4 называется конгруэнция π при условии, что точка A является четырехкратной фокальной точкой конгруэнции π.

Аналитически класс π_4 выделяется из конгруэнции π условиями:

$$p=1,\quad a=0,\quad h=-fb. \tag{1}$$

Уравнение образующего элемента и система уравнений Пфаффа конгруэнции π_4 имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2-2x^3=0,\qquad x^2=0; \tag{2}$$

$$\begin{cases}\omega_1^1=-\frac{1}{8}\{c\omega^1+(3b+e)\omega^2\},\ \omega_1^2=f\omega^1+g\omega^2,\\ \omega_2^1=(\ell-b)\omega^1+(g-c)\omega^2,\ \omega_3^1=-fb\omega^1+h\omega^2,\\ \omega_2^2=\frac{1}{8}\{3c\omega^1+(b+3e)\omega^2\},\ \omega_3^2=r\omega^1+s\omega^2,\\ \omega_1^3=\omega^1,\ \omega_2^3=-\omega^2,\ \omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,\ \omega^3=0.\end{cases} \tag{3}$$

Конгруэнции π_4 существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией C называется конгруэнция ассоциированных параболических цилиндров с образующей, параллельной вектору $\vec{e}_2$, и с направляющей – параболой конгруэнции π_4.

В общем случае конгруэнция π парабол имеет 5 фокальных семейств, а конгруэнция ассоциированных цилиндров-4 фокальных многообразия. В [2] было показано, что точка A является k-кратной фокальной точкой тогда и только тогда, когда она является k-кратной фокальной точкой цилиндра $(k=1,2,3)$. Представляет интерес вопрос о совпадении фокальных точек указанных многообразий, когда точка A имеет кратность, большую трех.

Т е о р е м а. Если индикатриса вектора $\vec{e}_1$ есть поверхность с касательной плоскостью, параллельной плоскости параболы, то пятая фокальная точка конгруэнции π_4 совпадает с четвертой фокальной точкой конгруэнции C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A –четырехкратная фокальная точка параболы, поэтому пятая фокальная точка конгруэнции π_4 и четвертая фокальная точка многообразия C найдутся соответственно из уравнений:

$$(kr+sfb)x^1+2kf-b(g+r)=0, \tag{4}$$

$$(fb(c-g)+k(b-f))x^1-b^2=0. \tag{5}$$

Поскольку $d\vec{e}_1=\omega_1^1\vec{e}_1+\omega_1^2\vec{e}_2+\omega_1^3\vec{e}_3$ и по условию $\omega_1^2=0$, то из (2) получим

$$f=g=0,\qquad kr\neq 0,\qquad b\neq 0. \tag{6}$$

Тогда (3) и (4) перепишутся в виде:

$$r(kx^1-b)=0,\quad b(kx^1-b)=0.$$

Следовательно, пятая фокальная точка многообразия π_4 совпадает с четвертой фокальной точкой конгруэнции C.

Из (1) и (6) следует, что в случае совпадения выше указанных фокальных точек $h=s=0$ и справедливы утверждения: а) конгруэнция касательных $\{A,\vec{e}_1\}$ – цилиндрическая; б) точка A – центр луча конгруэнции диаметров; в) точка A не может быть пятой фокальной точкой конгруэнции парабол.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии // Геометр. сб. / Томский ун-т. Томск, 1962. Т.161. С.76-86.

2. В е р б и ц к а я Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1980. Вып.11. С.17-21.